Prolongement d'applications uniformément continues définies sur une partie dense

Théorème
Soient E et F deux espaces métriques, avec F complet. Soient X une partie dense de E et f une application uniformément continue de X dans F. Il existe alors une unique application continue $\tilde{f}$ de E dans F prolongeant f.

Démonstration :

Unicité : Si g_1 et g_2 sont deux prolongements continus de f à E l'application

$$\begin{aligned} g = g_1 \times g_2 : \ & E \to F \times F \\ & x \mapsto (g_1(x), g_2(x)) \end{aligned}$$

est continue. L'ensemble A des points de E où g_1 et g_2 coïncident est l'image réciproque de la diagonale de $F \times F$, donc est fermé, et contient X puisque les restrictions de g_1 et g_2 à X sont égales à f. On en déduit que $A = E$ puisque X est dense dans E (et A est un fermé). Ainsi $g_1 = g_2$, ce qui prouve l'unicité d'un éventuel prolongement.

Existence : Soient $a \in E$ comme X est dense dans E il existe une suite $(x_n)_n$ de points de X qui converge vers a. Si $\tilde{f}$ est une fonction continue sur E qui prolonge f, on doit avoir :

$$\tilde{f} = \lim_{n \to +\infty} \tilde{f}(x_n) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n)$$

Pour prouver l'existence de $\tilde{f}$ on doit montrer que toute suite $(x_n)_n$ de X qui converge vers un point a de E a une image par f qui converge dans F et que cette limite ne dépend que de a.
En effet si la suite $(x_n)_n$ de X converge vers $a \in E$ alors c'est une suite de Cauchy de X. Elle est donc transformée par l'application uniformément continue f en une suite de Cauchy de l'espace complet F, donc en une suite convergente.
De plus si $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont deux suites de X convergeant vers a, la suite $(z_n)_n$ définie par :

$$z_{2n} = x_n \quad \text{et} \quad z_{2n+1} = y_n$$

converge alors elle aussi vers a. Alors si b est la limite de la suite $(f(z_n))_n$ on a,

$$f(x_n) = f(z_{2n}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} b$$

et,

$$f(y_n) = f(z_{2n+1}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} b$$

ce qui montre que les suites $(f(x_n))_n$ et $(f(y_n)_n)$ ont la même limite qu'on notera $\tilde{f}(a)$.
Pour prouver la continuité de $\tilde{f}$ on va montrer qu'elle est uniformément continue. Soit donc $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in X$

$$d(x, y) \leq \delta \ \Rightarrow \ d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

Soient alors $a, b \in E$ tels que $d(a,b) \leq \delta$. Il existe $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites de points de X convergeant respectivement vers a et b. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, a) + d(a, b) + d(b, y_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} d(a, b) \leq \delta$$

on a pour n assez grand :

$$d(x_n, y_n) \leq \delta$$

ce qui implique

$$d(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon$$

et donc par continuité de d :

$$d(\tilde{f}(a), \tilde{f}(b)) \leq \varepsilon.$$

Ce qui montre que $\tilde{f}$ est uniformément continue. □

Détails Supplémentaires

Proposition
Si f est uniformément continue de l'espace métrique E dans l'espace métrique F, toute suite de Cauchy de E est transformée par f en une suite de Cauchy de F.

Démonstration :
Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de E et soit $\varepsilon > 0$.
Puisque f est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, x' \in E$

$$d(x, x') \leq \delta \;\Rightarrow\; d(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$$

et puisque $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n, p \geq N \;&\Rightarrow\; d(x_n, x_p) \leq \delta \\ &\Rightarrow\; d(f(x_n), f(x_p)) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $(f(x_n))_n$ est une suite de Cauchy de F.

□

Référence

- Jean Saint-Raymond, *Topologie, calcul différentiel et variable complexe*